DOI:10.16136/j.joel.2022.02.0323

基于二维 DFT 域全相位滤波的波包设计

孔庆羽，苏　飞*

(天津理工大学 集成电路科学与工程学院,天津 300384)

摘要:信号滤波、谱分析和自适应信号处理在全相位信号处理领域中已得到广泛应用。本文在一维全相位信号处理方法的基础上,给出二维全相位变换的数学表达式,并构建了相应的信号处理系统图。其次,分析出全相位变换具有线性相位的充要条件,进而提出全相位波包的概念。第三,分别选择 Bartlett 和 Blackman 作为基窗,仿真出 20 个全相位正交波包。最后,借助全相位波包顺利地对图像展开了分解验证。分析表明,全相位波包可以实现对图像的多层分解,并在时域和频域上得到多种分辨率的子图。此分析方法在图像数据的压缩,边缘检验和自适应信号处理等诸多方面有着十分广泛的应用领域和发展前景。

关键词:波包;多分辨率分析(multi-resolution analysis,MRA);全相位;线性相位;基窗

中图分类号:TN911.73　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-0086(2022)02-193-10

Design of wave-packets two-dimensional all-phase-based filtering in DFT domain

KONG Qingyu, SU Fei*

(College of Integrated Circuit Science and Electrical and Electronic Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

Abstract: Signal filtering, spectrum analysis and adaptive signal processing have been widely used in all-phase signal processing. In this paper, based on one-dimensional all-phase signal processing method, the mathematical formula of two-dimensional all-phase transformation is given, and the corresponding signal processing system diagram is constructed. Secondly, the sufficient and necessary condition for linear phase of all-phased transform is analyzed to present all-phased wave-packets. Thirdly, Bartlett and Blackman base window are selected to simulate 20 all-phased wave-packets, respectively. Finally, by means of these packets, it's successfully to decompose two tested images. Experimental results demonstrate that all-phased wave-packets can be used to analyze the image in different layers, thereby achieving sub-images with multi-resolution in frequency domain and time domain. This novel method will potentially be applied in image compression, edge detection and adaptive signal processing fields.

Key words: wave-packets; multi-resolution analysis (MRA); all-phase; linear phase; base window

1 引　言

全相位概念及相关理论在过去二十年里进行了较为广泛的研究。目前,它已经在信号处理等多个领域中得到了广泛的应用,并且表现出了良好的特性如减少了吉布斯效应,且极大地降低了谱泄露[1-3]。在不同的变换域中设计得到的全相位滤波器具有较低的频率取样误差,且较好地平滑了截断误差[4]。近年,全相位的应用取得了较大的进展。周晓等[5]研究的加窗双正交全相位滤波器 WAPBT,主要讨论了 WAPBT 的构造原理,并提出了全相位变换的统一形式。赵晓娟等[6]将全相位应用于收集到的带有噪声的变压器信号处理中,实验分析表明全相位滤波能够较为容易地做到线性相位,谱泄露可以得到很大程度的抑制。

* **E-mail**:sufei@tjut.edu.cn

收稿日期:2021-01-09　**修订日期**:2021-05-28

基金项目:天津市科学技术协会专箸出版基金(202022)资助项目

实验结果充分表明，此方法极大地改善了谱的等波纹特性，提高了稀疏信号的还原精度[7]。此外，全相位在图像处理方面也得到了一定的研究成果[8-11]。

函数空间理论是多分辨率分析（multi-resolution analysis，MRA）方法的基础，其创立者 Mallat 通过一系列地深入研究和解决图像数据处理相关问题时总结并明确提出了广为人知的 Mallat 算法，其大体想法与多采样率数字滤波器组保持一致，MRA 在小波分析方法论中是极其重要的，它使得构造小波的框架统一化而且可以提供函数分解与重构的快速程序算法[12,13]。基于小波分析多解析度分析方法是连续不断以两组相互正交的高通和低通滤波器对接收到的信号 $f(t)$ 成功进行滤波，它是在很多各不相同的尺度上对目标信号展开局部性分析。就是将初始信号在若干个频率分辨率（一般是倍频程划定的频带）转换成很多个高低频分组数据，其中，经过低通滤波器可获得较大时间尺度的低频数据信息即信号的轮廓，经过高通滤波器处理后便可以得到具有小尺度的高频数据信息即噪声及突变[14]。

分析和重构滤波器的设计是 MRA 中两个重要的方面。小波虽然具有覆盖全频域的完备性，低频高分辨和高频低分辨的“变焦”性等诸多优点。但在实际应用中存在以下需要深入探索的问题：一是小波基的构造要求有限支撑，因此它是快速衰减的。所以，基于小波基的分析滤波器组存在冗余度；二紧支小波不具备对称性但需要满足重构条件，以至于其边界效应会因其尺度的不断增加而不断扩大，从而导致重建具有一定的误差；三是正交小波基的构造过程相对复杂[15,16]。

本文基于全相位信号处理的思想，提供了一种新颖的图像分析和重构的方法。第一，对二维全相位信号处理过程进行了数学推导和证明，并构建了系统原理图；第二，分析了二维全相位变换具备线性相位的充要条件；第三，描述全相位波包设计的步骤，波包对图像进行时频分析的原理。最后，借助 MATLAB 平台，利用设计得到的全相位波包，对图像成功进行了分解试验。

2　全相位波包设计

首先，设计二维全相位系统架构并分析系统传输特性函数。第二，利用全相位系统特性，设计全相位波函数包。第三，基于全相位设计的半带滤波器进行谱分解，构造功率严格互补的分析滤波器 $\boldsymbol{H}_m$ 和 $\boldsymbol{F}_m$。

2.1　二维全相位系统架构

全相位处理的基本思想是将信号在分段或分块的各个位置对输出产生的影响均按照简单的算术平均进行统计。本文在文献[17]中给出了二维全相位行处理的系统架构，再细化处理过程即将二维行列处理的过程综合起来并展开输入信号矩阵，二维全相位处理系统如图 1 所示。

整个系统工作流程可以描述为：尺寸为 $L\times M$ 的二维数据帧按行优先的方式输入大小为 $3\times M$ 的缓存中，从缓存中按照列的方向依次取出 2×2 的数据块，时间间隔为列方向上的单位延迟（设定为基准时钟），每个数据块前窗加权后做 α 正变换，在变换域中与特性矩阵 $\boldsymbol{H}$ 点乘，在做 β 反变换后后窗加权并移位相加。相加得到的 2×2 中间数据块分成两路，其中一路直接存储至深度为 M，宽度为 2 的队列中。另一路则与队列的输出即数据帧的上一行产生的中

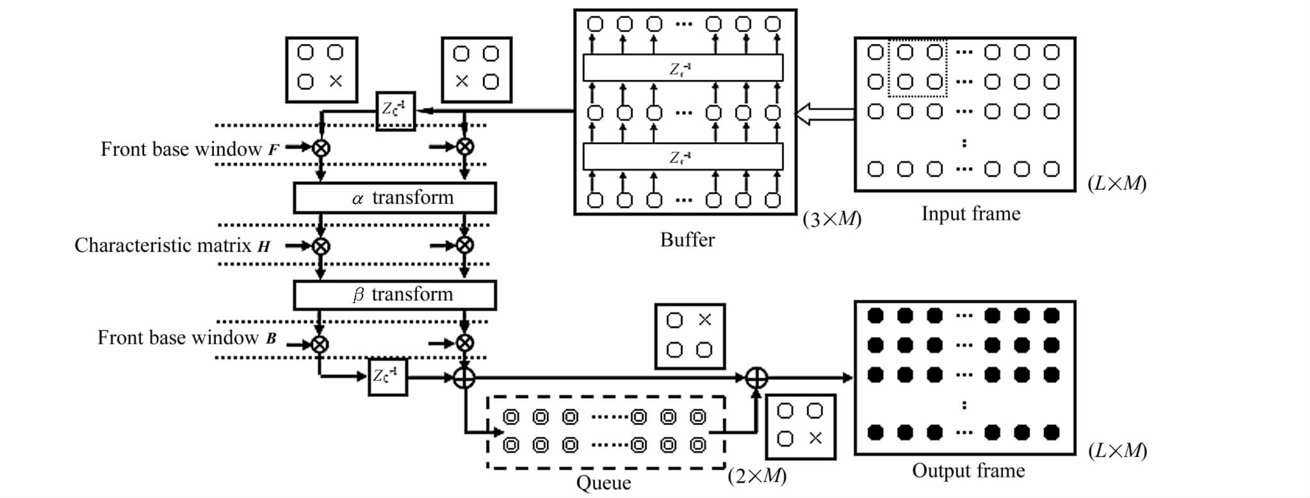


图 1　二维全相位处理系统(N=2)

Fig. 1　Two dimensional all phase processing system

间数据块相加，得到处理后的数据。一般情况下，缓存的尺寸为$(2N-1)\times M$，列延迟的个数为 $N-1$ 个，队列深度为$(N-1)\times M$，相应的加法器的个数则为 $N-1$ 个。

2.2 理论推导

假设变换域系统特性矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是 $N\times N$ 维，任意元素 x_{ij} 在原点位置时对应的输入矩阵$\boldsymbol{X}^{(0,0)}$，定义如下：

$$\boldsymbol{X}^{(0,0)}=\begin{bmatrix} x_{i,j} & x_{i,j+1} & \cdots & x_{i,j+N-1} \\ x_{i+1,j} & x_{i+1,j+1} & \cdots & x_{i+1,j+N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i+N-1,j} & x_{i+N-1,j+1} & \cdots & x_{i+N,j+N-1} \end{bmatrix}_{N\times N}, \tag{1}$$

传输特性序列 $\boldsymbol{H}$，前窗 $\boldsymbol{F}$ 和后窗 $\boldsymbol{B}$ 分别表示为：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} & \cdots & H_{0,N-1} \\ H_{1,0} & H_{1,1} & \cdots & H_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1,0} & H_{N-1,1} & \cdots & H_{N-1,N-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} F_{0,0} & F_{0,1} & \cdots & F_{0,N-1} \\ F_{1,0} & F_{1,1} & \cdots & F_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N-1,0} & F_{N-1,1} & \cdots & F_{N-1,N-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & \cdots & B_{0,N-1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & \cdots & B_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N-1,0} & B_{N-1,1} & \cdots & B_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

则按照图 1 所示，二维全相位系统的中间输出由下计算式给出为：

$$\boldsymbol{Y}_{u,v}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\beta_{u,m}\beta_{v,n}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}H_{m,n}F_{p,q}B_{u,v}X_{p,q}^{(u,v)}=\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}\beta_{u,m}\beta_{v,n}H_{m,n}F_{p,q}B_{u,v}\Big)X_{p,q}^{(u,v)}, \tag{3}$$

对于输入 $\boldsymbol{X}^{(0,0)}$，对应 $x_{i,j}$ 的输出是$(u=0,v=0)$位置的 $Y(0,0)$。二维全相位数字处理的输入是 $x_{i,j}$ 遍历 $N\times N$ 个位置的N^2个矩阵，输出则是对应 $\boldsymbol{X}^{(u,v)}$ 在位置(u,v)处 N^2 个输出 $Y(u,v)$和的平均。遍历矩阵 $\boldsymbol{X}^{(u,v)}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{X}^{(u,v)}=\begin{bmatrix} x_{i-u,j-v} & x_{i-u,j-v+1} & \cdots & x_{i-u,j-v+N-1} \\ x_{i-u+1,j-v} & x_{i-u+1,j-v+1} & \cdots & x_{i-u+1,j-v+N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i-u+N-1,j-v} & x_{i-u+N-1,j-v+1} & \cdots & x_{i-u+N-1,j-v+N-1} \end{bmatrix}_{N\times N}, \tag{4}$$

结合表达式(3)和(4)，可知二维全相位信号处理对应某输入点 $x_{i,j}$ 的输出为：

$$y=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\boldsymbol{Y}_{u,v}=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\Big[\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}B_{u,m}\beta_{v,n}H_{m,n}F_{p,q}B_{u,v}\Big)X_{p,q}^{(u,v)}\Big], \tag{5}$$

由表达式(4)可以得出：

$$X_{p,q}^{(u,v)}=x_{i+p-u,j+q-v}, \tag{6}$$

令：

$$T_{p,q}^{(u,v)}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}\beta_{u,m}\beta_{v,n}H_{m,n}, \tag{7}$$

把式(6)和(7)代入到式(5)，并做如下整理：

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\Big[\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}F_{p,q}B_{u,v}T_{p,q}^{(u,v)}x_{i+p-u,j+q-v}\Big]\overset{r=p-u,\,c=q-v}{=\!=\!=\!=\!=}\\
&\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\Big[\sum_{r=-u}^{N-1-u}\sum_{c=-v}^{N-1-v}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}x_{i+r,j+c}\Big]=\\
&\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{u=0}^{N-1-r}+\sum_{r=-N-1}^{0}\sum_{u=-r}^{N-1}\Big)\Big(\sum_{c=1}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1-c}+\sum_{c=-N+1}^{0}\sum_{v=-c}^{N-1}\Big)B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}x_{i+r,j+c}=\\
&\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{c=1}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1-c}+\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{c=-N+1}^{0}\sum_{v=-c}^{N-1}+\sum_{r=-N+1}^{0}\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{c=1}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1-c}+\sum_{r=-N+1}^{0}\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{c=-N+1}^{0}\sum_{v=-c}^{N-1}\Big)\\
&B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}x_{i+r,j+c}=\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{c=1}^{N-1}\Big(\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{v=0}^{N-1-c}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\Big)\Big)+\\
&\Big(\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{c=-N+1}^{0}\Big(\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{v=-c}^{N-1}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\Big)+\sum_{r=-N+1}^{0}\sum_{c=1}^{N-1}\Big(\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1-c}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\Big)+\\
&\sum_{r=-N+1}^{0}\sum_{c=-N+1}^{0}\Big(\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{v=-c}^{N-1}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\Big)\Big)x_{i+r,j+c},
\end{aligned} \tag{8}$$

令：

$$\boldsymbol{A}=\begin{cases}\boldsymbol{A}^{++}=\left[\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{v=0}^{N-1-c}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\right],1\le r\le N-1,1\le c\le N-1\\ \boldsymbol{A}^{+-}=\left[\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1-r}\sum_{v=-c}^{N-1}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\right],1\le r\le N-1,-N+1\le c\le 0\\ \boldsymbol{A}^{-+}=\left[\frac{1}{N^2}\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1-c}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\right],-N+1\le r\le 0,1\le c\le N-1\\ \boldsymbol{A}^{--}=\left[\frac{1}{N^2}\sum_{u=-r}^{N-1}\sum_{v=-c}^{N-1}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}\right],-N+1\le r\le 0,-N+1\le c\le 0\end{cases},\tag{9}$$

则表达式(8)可以简化为：

$$y=\sum_{r=-N+1}^{N-1}\sum_{c=-N+1}^{N-1}A_{r,c}x_{i+r,j+c},\tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 称为全相位变换基,相应的 T 为变换核。对于二维傅立叶变换 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{F}_N$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{F}_N{}^*$ 分别是正反变换基矩阵为：

$$F_{m,p}=W_N^{mp}=(W^*)_N^{-mp}=(W_N^{-mp})^*=F_{m-p}^*,F_{n,q}=W_N^{nq}=(W^*)_N^{-nq}=(W_N^{-nq})^*=F_{n,-q}^*,\tag{11}$$

式中,$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$,$T$ 表达式可表示如下：

$$T_{p,q}^{(u,v)}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}F_{m,p}F_{n,q}F_{u,m}^*F_{v,n}^*H_{m,n}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}F_{(u-p),m}^*H_{m,n}F_{n,(v-q)}^*=h(u-p,v-q),\tag{12}$$

把式(12)代入到式(9)即可得到计算式为：

$$\boldsymbol{A}=\left[\frac{h_e(-r,-c)}{N^2}\Theta[B(-r,-c)\otimes F(r,c)]\right]=\boldsymbol{h}_e\Theta\boldsymbol{C},\tag{13}$$

式中,Θ 表示点乘,$\otimes$表示循环卷积,$\boldsymbol{h}_e$ 表示系统单位脉冲响应延拓矩阵。

式(13)表明,N 阶二维离散傅立叶变换(discrete Fourier transform,DFT)全相位基矩阵等于前后窗卷积再点乘系统单位脉冲响应延拓矩阵后除以 N^2。且由式(10)可以求出,二维全相位信号处理系统的特性函数表示为：

$$H(\mathrm{j}\omega_r,\mathrm{j}\omega_c)=\sum_{r=-N+1}^{N-1}\sum_{c=-N+1}^{N-1}A_{r,c}^{(d)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(r\omega_r+c\omega_c)}=A_{0,0}^{(d)}+\sum_{c=1}^{N-1}(A_{0,c}^{(d)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}c\omega_c}+A_{0,-c}^{(d)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}c\omega_c})+\sum_{r=1}^{N-1}(A_{r,0}^{(d)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}r\omega_r}+A_{-r,0}^{(d)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}r\omega_r})+\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{c=1}^{N-1}[A_{r,-c}^{(d)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(r\omega_r-c\omega_c)}+A_{-r,c}^{(d)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(r\omega_r-c\omega_c)}+A_{r,c}^{(d)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(r\omega_r+\omega_c)}+A_{-r,-c}^{(d)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(r\omega_r+\omega_c)}],\tag{14}$$

若全相位变换基 $\boldsymbol{A}$ 满足：

$$\boldsymbol{A}_{r,c}=\boldsymbol{A}_{-r,-c},\tag{15}$$

则特性函数可以简化成：

$$H(\mathrm{j}\omega_r,\mathrm{j}\omega_c)=A_{0,0}+2\sum_{c=1}^{N-1}A_{0,c}\cos(c\omega_c)+2\sum_{r=1}^{N-1}A_{r,0}\cos(r\omega_r)+2\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{c=1}^{N-1}[A_{r,-c}\cos(r\omega_r-c\omega_c)+A_{r,c}\cos(r\omega_r+c\omega_c)],\tag{16}$$

即具有严格的零相位。由式(13)可以得出,在前后窗相等或者均满足中心对称且二维系统单位脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{h}$ 具有中心对称性的条件下,$\boldsymbol{A}$ 具有中心对称性。

2.3　二维全相位波包

对于分块尺寸为 $N\times N$ 的输入数据,全相位处理将参与计算的相关数据块尺寸扩展为$(2N-1)\times(2N-1)$,提高了数据块边界的平滑性。通过加入前窗和后窗,提高了同等时刻输入信号的能量占比而获得较低的谱泄露。如果满足线性相位,全相位处理对特性矩阵和基窗则表现出正交可加性。即在DFT域系统特性矩阵 $\boldsymbol{H}$ 分解成正交互补的 N 个子系统矩阵之和,各个子系统输出之和等于原系统的总输出。因为,由(1)式和(2)式可以得出,全相位输出对基矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有线性,而 $\boldsymbol{A}$ 对于 T 具有线性,且下式(17)成立。

$$T=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}\beta_{u,m}\beta_{v,n}H_{m,n}F_{p,q}B_{u,v}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}\beta_{u,m}\beta_{v,n}\sum_{i=0}^{N-1}H_{m,n}^{(i)}F_{p,q}B_{u,v}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_{m,p}\alpha_{n,q}\beta_{u,m}\beta_{v,n}H_{m,n}^{(i)}F_{p,q}B_{u,v}=\sum_{i=0}^{N-1}T^{(i)},\tag{17}$$

同理,全相位系统对基窗 $\boldsymbol{F}$ 或者 $\boldsymbol{B}$ 也具有可加性,证明如下。

$$A_{r,c}=\sum_{u=0}^{R}\sum_{v=0}^{C}B_{u,v}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v}=\sum_{u=0}^{R}\sum_{v=0}^{C}\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_iB_{u,v}^{(i)}T_{r+u,c+v}^{u,v}F_{r+u,c+v}=$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\sum_{u=0}^{R}\sum_{v=0}^{C}B_{u,v}^{(i)}T_{r+u,c+v}^{(u,v)}F_{r+u,c+v} = \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i A_{r,c}^{(i)}, \quad (18)$$

由式(17)和式(18)可以得出如下结论：给出不同的正交子系统特性矩阵 $\boldsymbol{H}_i$，同时组合不同的基窗函数 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{B}$，就可以设计出不同的全相位分解包函数系列。系统特性矩阵具有频域的物理意义，可以直观地设定子系统的频率成分及分辨率。另外，因为基窗函数的选取自由度很大，按照此方法很容易设计出全相位包族。

系统特性矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的划分对信号在频域上进行划分，基窗函数 $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{B}$ 的划分对信号在时域上进行选择。因此，两者的组合构成了对信号的时频分析的一种新的方式。二维全相位处理时频分析如图 2 所示。

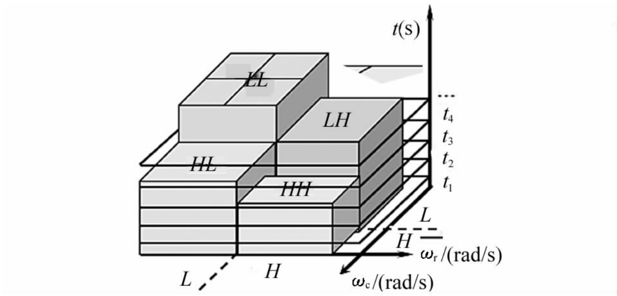


图 2　二维全相位处理时频分析

Fig. 2　Two-dimensional all-phase processing in time-frequency domain

分别沿着行和列的方向上进行高低通分解，在频域上把图像分解成四个子图。每个子图在时间上可以通过基窗函数的分解实现时间上的切割。切割的时间清晰度按照频率的不同而不同，高频具有较高的时间清晰度，低频可以选择较低的时间清晰度。其次，低频成分 LL 可以重复执行分解操作，构成 MRA。频域的划分可以通过频域互补的高低通滤波器实现，时域的切割则通过基窗函数分解来实现。

3　仿真验证

在 8 阶全相位系统条件下，按照单位脉冲响应分解组合基窗函数，设计并仿真出全相位包族。此外，利用分解得到的包族对图像进行了分解实验。

3.1　二维全相位波包仿真

设全相位系统特性尺寸为 8×8，首先按照公式(19)进行正交分解。其中 $\boldsymbol{H}_{LL}$，$\boldsymbol{H}_{HL}$，$\boldsymbol{H}_{LH}$，$\boldsymbol{H}_{HH}$ 分别表示水平及垂直方向上低通幅频响应矩阵、水平低通及垂直高通幅频响应矩阵、垂直高通及水平低通幅频响应矩阵和水平及垂直方向上高通幅频响应矩阵。分解的方式通过两个频率互补的一维幅频矩阵向量交叉相乘得到。由公式(13)—(16)得知，对于中心对称的幅频响应矩阵，全相位基也满足中心对称，系统具有严格的零相位。所以，这里只讨论幅频特性。

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{1}]_{8\times8} = \boldsymbol{H}_{LL} + \boldsymbol{H}_{HL} + \boldsymbol{H}_{LH} + \boldsymbol{H}_{HH} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{1}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{1}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{1}_{2\times2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{1}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{1}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{1}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{1}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{1}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}。 \quad (19)$$

第二步，基窗的选择。由公式(13)—(16)得知，具有严格零相位的全相位系统要求二维卷积窗需要满足中心对称，易知前后基窗或者相等，或者均中心对称。传统的其中常用的窗函数均满足中心对称，采用一维基窗向量相乘的方式构建二维窗。以矩形窗为例，形成计算式为：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \sum\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{W}_2\\ \boldsymbol{W}_3 & \boldsymbol{W}_4\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \begin{matrix}2&1\\4&2\end{matrix}\\ \boldsymbol{0}_{4\times2} & \boldsymbol{0}_{4\times4} & \boldsymbol{0}_{4\times2}\\ \begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \begin{matrix}2&1\\4&2\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{2\times2} & \begin{matrix}3&4&4&3\\6&8&8&6\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\\ \boldsymbol{0}_{4\times2} & \boldsymbol{0}_{4\times4} & \boldsymbol{0}_{4\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times2} & \begin{matrix}6&8&8&6\\3&4&4&3\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{2\times2} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\\ \begin{matrix}3&6\\4&8\\4&8\\3&6\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{4\times4} & \begin{matrix}6&3\\8&4\\8&4\\6&3\end{matrix}\\ \boldsymbol{0}_{2\times2} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{2\times2} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\\ \boldsymbol{0}_{4\times2} & \begin{matrix}9&12&12&9\\12&16&16&12\\12&16&16&12\\9&12&12&9\end{matrix} & \boldsymbol{0}_{4\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times2} & \boldsymbol{0}_{2\times4} & \boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}。 \quad (20)$$

4 个子窗 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_3$，$\boldsymbol{W}_4$ 分别表示图像水平及垂直方向上长时间维度、水平短时间维度及垂直长时间维度、水平长时间维度及垂直短时间维度和水平及垂直均短时间维度。其均满足中心对称，结合第一步形成的对称子带使全相位系统具有严格的零相位。此外，需要对各个子窗进行归一化处理。

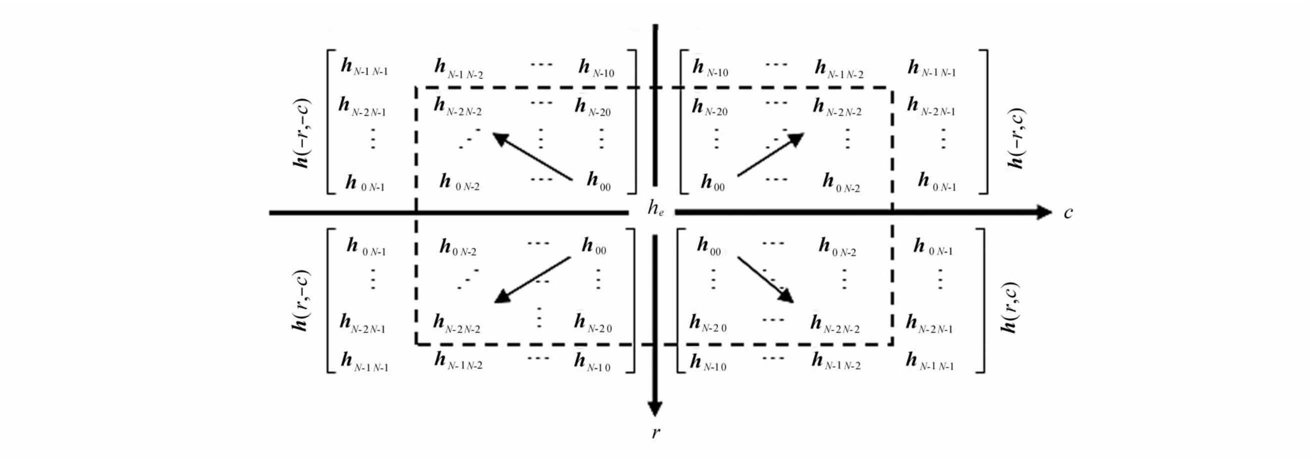


图 3 二维全相位处理时频分析

Fig. 3 Two-dimensional all-phase processing in time-frequency domain

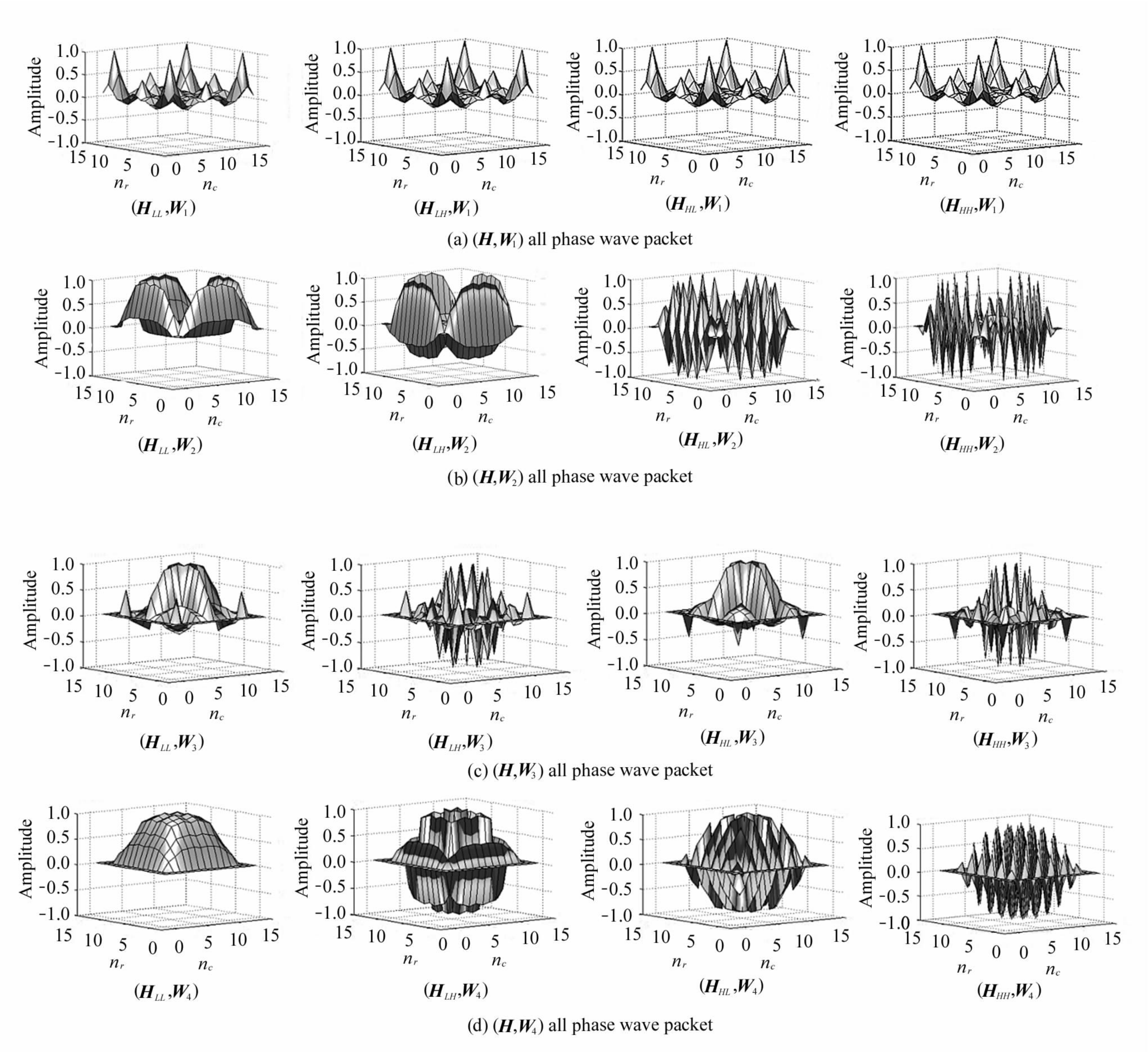


图 4 二维三角基窗条件下的一次分解全相位波包

Fig. 4 First decomposed all phase wave packet in two dimensionaltriangularbase window

第三步，基于第二步形成的二维子窗 $\boldsymbol{W}_i$ 计算相应的卷积子窗 $\boldsymbol{C}_i$。按照第一步构建的子带 H_i 计算相应的单位脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{h}_i$，二维全相位处理时频分析如图 3 所示，并按照图 3 方式进行延拓。

按照公式(13)即可得到全相位基 $\boldsymbol{A}$。在下面的实验中，分别选择传统的 7 种基窗中 Bartlett 基窗和 Blackman 基窗形成卷积窗，再对 4 个子带分别进行时间切割。采用傅里叶变换域，由于 A 是中心对称的，按照公式(16)构造的全相位信号处理特性具有实的幅度，故这里只对幅度特性进行了仿真。可以证明，采用前后基窗的全相位的相频特性恒为零。二维三角基窗条件下的一次分解全相位波包如图 4 所示，图 4 首先列出 DFT 时选用 Bartlett 基窗的实验结果。(在 MATLAB7.0 平台上进行 M 编程)

图 4(a)—4(c)分别表示的是在公式(19)定义的四个子带条件下，时域按照公式(20)定义的归一化卷积窗构造的 4×4 个全相位波包。不同的基窗函数对系统特性的影响主要体现在过渡带和旁瓣衰减，七种传统窗的参数如表 1 所示。(B 是 3 dB 带宽，A 是最大旁瓣衰减，D 是旁瓣衰减速度)。

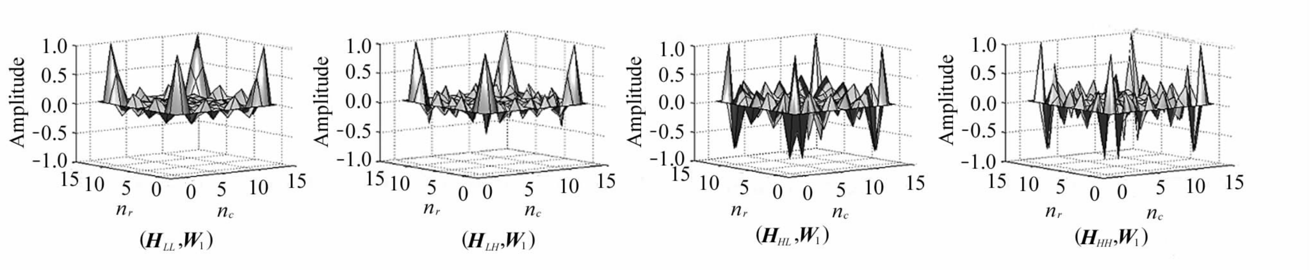
选择窗函数一般要求主瓣尽量窄，能量尽量集中在主瓣内，从而在谱分解时获得较高的频率分辨率，影响到全相位波包使其具有较小的过渡带。其二，尽量选择具有较大旁瓣衰减幅度的窗谱，即能量尽量集中在主瓣，影响到全相位波包使波峰和波纹减少，加速阻带的衰减。其三，旁瓣衰减速度尽量大，即谱泄露小，影响到全相位波包使短时性效果突出。一般情况下，三个参量是相互矛盾的，所以，需要根据信号分析的实际需求来进行选择。如果要求具有较高的谱分辨率，矩形基窗效果最好。如果要求高精度分析幅度，Blackman 基窗效果最好。如果要求锐利的短时性，Bartlett 基窗可以考虑使用。作为对比，变更基窗为二维 Blackman 基窗条件下的一次分解全相位波包如图 5 所示。

表 1　7 种传统窗的参数

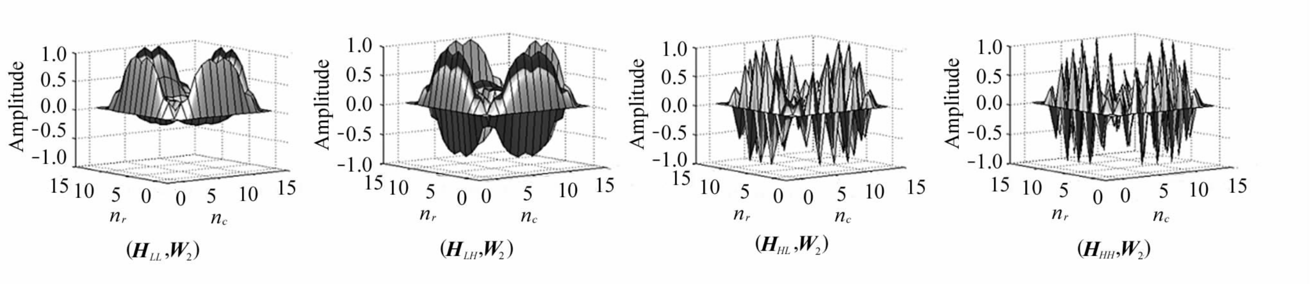
Tab. 1　Parameters of seven traditional window

Item	Main lobe width/ (π/N)	B/ Δω	A/dB	D/ (dB/oct)
Rectangle	4	0.89	−13.15	−13.18
Bartlett	8	1.28	−25.70	−25.89
Cosine	6	1.27	−22.08	−11.25
Hanning	8	1.53	−31.42	−17.73
Hamming	8	1.35	−39.05	−5.65
Blackman	12	1.74	−55.21	−8.26
Papoulis	12	1.65	−46.53	−29.17

对比图 5 和图 4，可以明显得出，由于选择的基窗不同而得到的各个正交分量包的形状是有差别的，主要体现在波形的衰减快慢、主瓣和旁瓣的能量分配。由于选择的窗函数是各方向对称的，包也表现出各向对称的特性，显然系统具有严格的零相位。



(a) $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{W}_1)$ all phase wave packet



(b) $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{W}_2)$ all phase wave packet

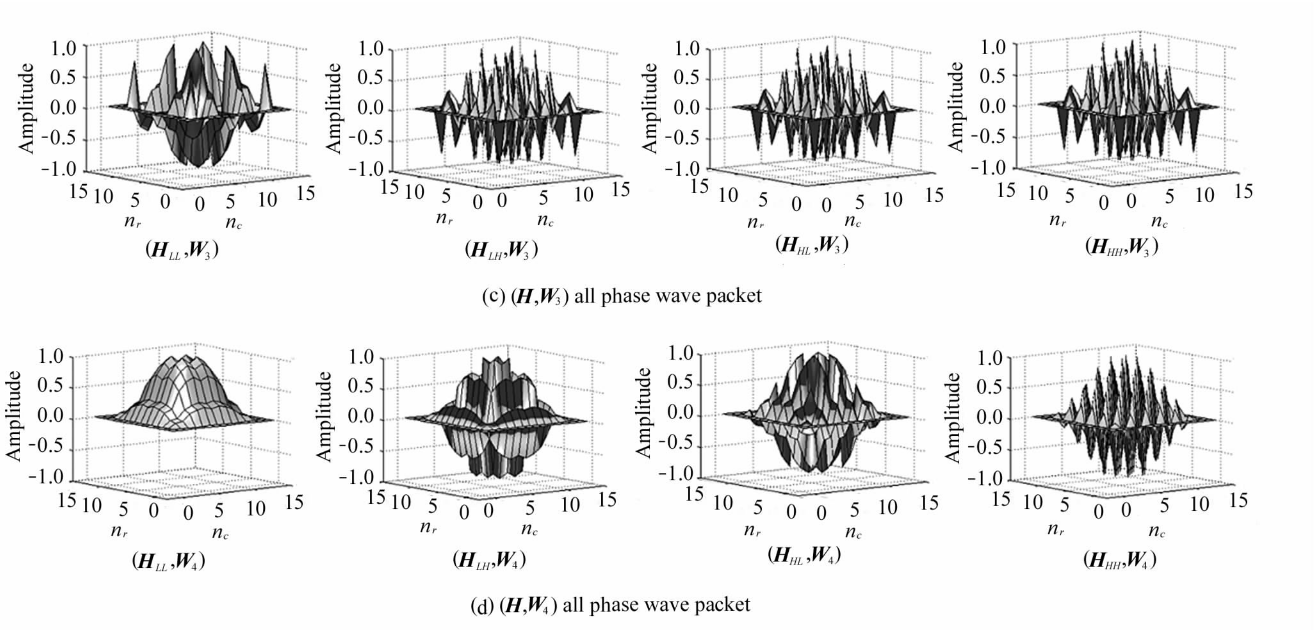


图 5 二维 Blackman 基窗条件下的一次分解全相位波包

Fig. 5 First decomposed all phase wave packets with 2-dimensional Blackman base window

3.2 基于全相位波包的图像分解

利用构造的全相位波包对图像按照公式(10)处理即可完成图像的分解处理。对于 $N\times N$ 的图像,全相位处理的维度是$(2N-1)\times(2N-1)$,因此,图像边缘要做拓展预处理。基于全相位波包的实验方案如图 6 所示。

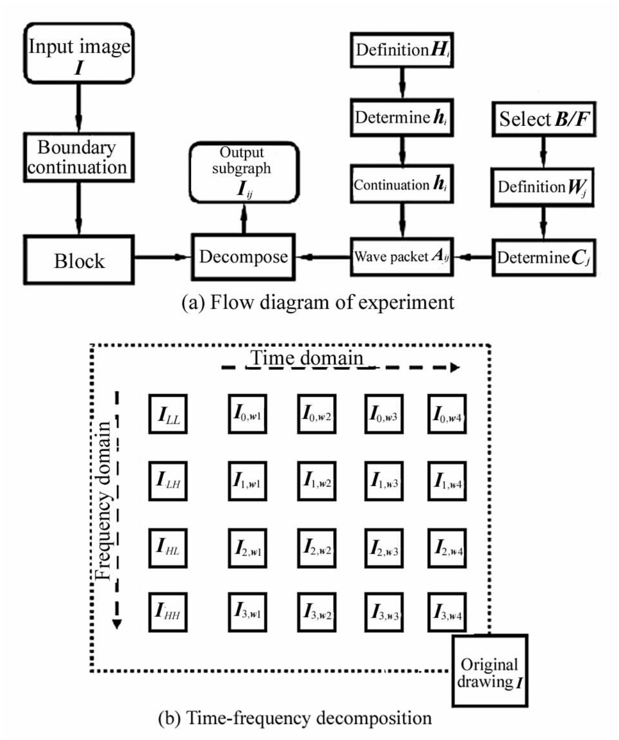


图 6 基于全相位波包的实验方案

Fig. 6 Experimental scheme based on all phase wave packets

选用 8 阶 Bartlett 基窗,基于全相位波包的图像时频分解如图 7 所示。

以上过程是在 MATLAB7.0 平台上运行的,分别在频域和时域上对图像进行了分解。从频域图可以得出,低频反映了图像的主要内容,高频则分解出图像的轮廓。时域图则反映了不同时间窗口的图像内容。按照 3.1 节内容,如果选择不同的基窗而形成不同的全相位波包,对图像分析可以得到不同的分解效果。

选择两幅图像进行分解验证,测试图像信息如表 2。

表 2 测试图像信息

Tab. 2 Information of the tested images

Image	Format	Size S/byte	Width W/byte	Length L/byte	Bit width B/bit	Color type
Rice	png	44 607	256	256	8	gray
Cameraman	tif	65 240	256	256	8	gray

4 结 论

本文在推导二维全相位信号处理原理的基础上,首次构造了二维全相位信号处理系统框图,并分析了二维 DFT 域全相位变换满足线性相位的充要条件。其次,基于全相位变换基,设计出正交波包,并在 Bartlett 和 Blackman 两种基窗条件下进行了仿真。最后,利用形成的全相位波包成功地对图像进行了时频分解。

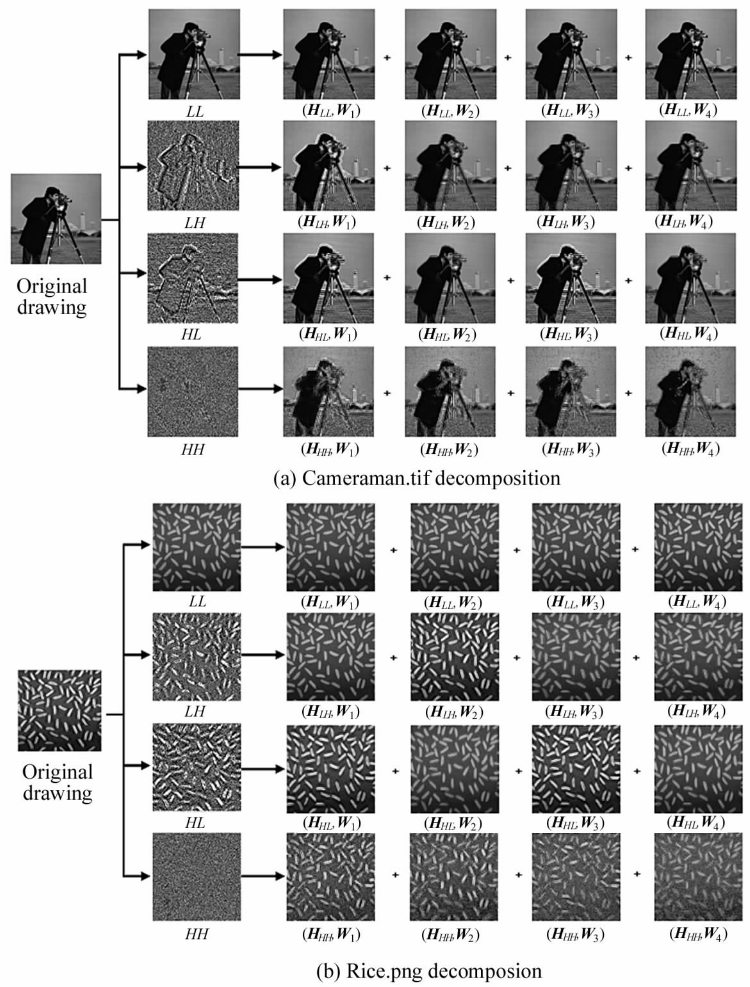


图 7　基于全相位波包的图像时频分解

Fig. 7　Image decomposition based on all-phase wave packets in time-frequency domain

本文提出了一种新的基于 DFT 域全相位的图像 MRA 的方法，并可以较直观地选取基窗函数和特性矩阵设计出不同的正交波包，与传统的小波包的选取对比，本方法具有较大的自由度。分解得到的频域图像较好地提取了图像的边缘特征，可以进一步进行边缘检测，图像压缩，图像除噪等处理。时域分解图则较好地获得了数据的相关性，在自适应处理方面可以展开应用。

参考文献：

[1] WU G Q，WANG Z H. Design method of digital filter with zero-phase based on all phase[J]. Journal of Electronics and Information Technology，2007，29(3)：574-577.

[2] BOUGHAMBOUZ A，BELLABAS A，MAGAZ B，et al. Improvement of radar signal phase extraction using all phase FFT spectrum analysis[C]//7th Seminar on Detection Systems Architectures and Technologies，February 20-22，2017，Algiers，Algeria. New York：IEEE，2017：30-35.

[3] TIAN J H，SUN J P，WANG G H，et al. Multiband radar signal coherent fusion processing with IAA and APFFT[J]. IEEE Signal Processing Letters，2013，20(5)：463-466.

[4] FU Q M，JIANG B C，WANG C Y，et al. A novel deblock in 3g quantization table for luminance component in baseline JPEG[J]. Journal of Communications，2015，10(8)：629-637.

[5] ZHOU X，WANG C Y，ZHANG Z，et al. Interpolation filter design based on all-phase DST and its application to image demosaicking[J]. Information (Switzerland)，2018，9(9)：206.

[6] ZHAO X J，ZHOU Y Q，ZHAO X R，et al. Power transformer noise analysis based on all-phase FFT and filtering technique[C]//53rd International Universities Power Engineering Conference (UPEC)，September 4-7，2018，Glasgow，UK. New York：IEEE，2018.

[7] HUANG X D，LIU M Z，YANG L，et al. Joint estimation of

frequency and direction of arrival under the single-and-parallel spatial-temporal undersampling condition[J]. Acta Physica Sinica,2017,66(18):11-19.

[8] XU W,LI Y,MIAO J H,et al. A novel design of sparse prototype filter for nearly perfect reconstruction cosine-modulated filter banks[J]. Algorithms,2018,11(5):2-9.

[9] THOMS S J, ARSANA P. Optimum low complex tree structured filter banks using overlap-add method[C]//International Conference on Emerging Technological Trends,October 21-22,2016,Kollam,India. New York:IEEE,2016:01-06.

[10] GAWANDE J,RAHULKAR Amol D P,HOLAMBE,et al. A new approach to design triplet halfband filter banks based on balanced-uncertainty optimization[J]. Digital Signal Processing,2016,56(1):123-131.

[11] ZHANG C X,WANG C Y,JANG B C. Video compression algorithm based on directional all phase biorthogonal transform and H.263[J]. International Journal of Signal Processing,Image Processing and Pattern Recognition,2016,9(3):189-198.

[12] LIU C,YANG Y. Single image defogging algorithm based on adaptive wavelet fusion[J]. Journal of Optoelectronics · Laser,2020,31(3):318-325.
刘策,杨燕. 基于自适应小波融合的单幅图像去雾算法[J]. 光电子 · 激光,2020,31(3):318-325.

[13] AOSIMAN A,ABULIJIANG A. Color image enhancement algorithm based on wavelet transform and histogram equalization[J]. Journal of Optoelectronics · Laser,2021,32(1):14-18.
阿卜杜如苏力 · 奥斯曼,艾力米努 · 阿布力江. 小波变换和直方图均衡化的保持色调不变彩色图像增强算法[J]. 光电子 · 激光,2021,32(1):14-18.

[14] LEE Y J,HIRAKAWAKEIGO,NGUYEN T Q. Lossless compression of CFA sampled image using decorrelated Mallat wavelet packet decomposition[C]//24th IEEE International Conferenceon Image Processing,September 17-20,2017,Beijing,China. New York:IEEE,2017:2721-2725.

[15] QIUZ,LEE C M,XU Z H,et al. A multi-resolution filtered-x LMS algorithm based on discrete wavelet transform for active noise control[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2016,66(7):458-469.

[16] RAJNI C,SIKRI G. Distinctive approach to design tree in wavelet packet based OFDM system[J]. Journal of Engineering Science and Technology Review,2017,10(6):16-20.

[17] SU F,CAO J H,DUAN Y X. Design and implementation of 2D all-phase fitler in DFT domain[J]. Acta Electronica Sinica,2015,43(11):2172-2179.
苏飞,曹继华,段宇翔. 二维 DFT 域全相位数字滤波器设计与实现[J]. 电子学报,2015,43(11):2172-2179.

作者简介:

苏 飞 (1975—),男,博士,副教授,主要从事数字信号处理、音视频编码、数据压缩等方面的研究.